39 希爾伯特第三問題

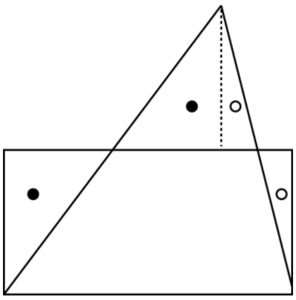
在 1900 年時，希爾伯特於巴黎舉行的第二屆國際數學會議上，提出了歷史上尚未解決的二十三個數學問題集。其中第三問題是有關多面體的分割問題。為了易於瞭解及歷史發展的原因，我們從較簡單的多邊形的分割問題講起。同時為了方便討論起見，本文所指的多邊形與多面體都是指凸多邊形與凸多面體(事實上,這樣的條件限制可以剔除)。

39.1 多邊形的基本定理

假如我們手邊有有限個多邊形（形狀可以相異），甲利用這些多邊形拼湊出一個大多邊形 R；乙卻利用這些多邊形拼湊出另一個大多邊形 T。儘管 R 與 T 的形狀可能不一樣，但是它們的面積一定相同(因為均由同樣的多邊形拼湊而成,差別僅在拼湊方式而已)。為了方便起見，我們稱這樣拼湊而成的多邊形 R 與 T 同餘。關於同餘多邊形，最典型，也是最膾炙人口的例子有

例題 39.1 假設 T 是一個三角形；R 是一個矩形。如果三角形 T 的底邊邊長與矩形 R 的長一樣；三角形 T 底邊上的高是矩形 R 寬的兩倍，則三角形 T 與矩形 R 是同餘的。

【證明】這問題的證明是容易的，將三角形 T 與矩形 R 疊在一起（如下圖）



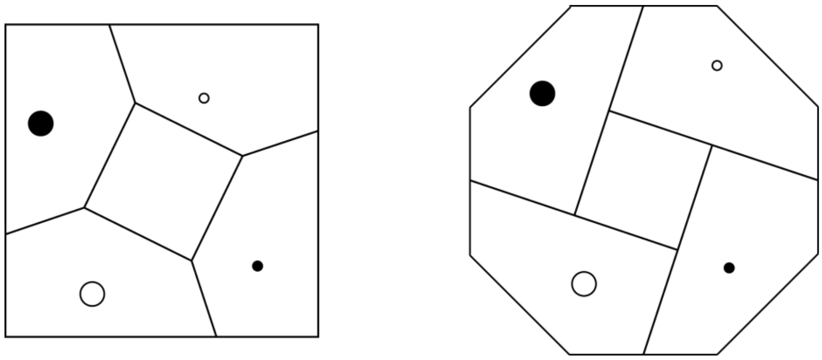
由虛線（輔助線）知道：此兩圖形是由三塊多邊形（一塊四邊形、兩塊三角形）用兩種不同的方式拼湊而成；因此這樣的三角形 T 與矩形 R 是同餘的。

稍微困難一點的例子是

例題 39.2 假設 T 是一個正方形；S 是一個正八邊形。如果正方形 T 的面積與正八邊形

S的面積相等，則T與S是同餘。

【證明】證明如下圖的分割，這個分割方法是特姆斯在 1933 年給的。



一般數學家相信：不可能找到四塊小多邊形同時可以拼湊出T與S；也就是說特姆斯的五塊分割，已經是最少的了；如果你會證明的話，這將是一個很好的結果。

最後值得一提的是：有關多邊形的同餘（或分割）問題最重要的一個結果是多邊形的基本定理，即面積相等的多邊形都是同餘。由此知道，單位面積的正三角形與單位面積的正方形是同餘的；你能給一種分割嗎？或者給多邊形的基本定理一個證明。

39.2 多面體的同餘問題

有了多邊形同餘的觀念之後。同樣的道理，可以考慮多面體的情形。如果我們手邊有有限個多面體（形狀可以相異）的積木，甲利用它們拼湊出一個大多面體T；乙卻利用這些多面體積木拼湊出另一個大多面體S，這時我們稱多面體T與S同餘。希爾伯特的第三問題就是問“如果有兩個多面體T與S，它們的體積相同，則多面體T與S是否同餘？”。事實上，這問題的答案是否定的。在希爾伯特提出這個問題之後的幾個月內，數學家馬德恩便解決了這個問題。馬德恩的方法是去證明“單位體積的正四面體與正六面體（正立方塊）是不同餘的”；為了證明這個反例，馬德恩首先得到一個有關同餘的必要條件。底下讓我們先來瞭解馬德恩的這個必要條件是什麼。

多面體的一個二面角是指此多面體某兩個相鄰面的夾角。因為多面體兩個相鄰面的交集剛好是此多面體的一條邊線，所以一個多面體的邊線剛好與這個多面體的二面角有一一

對應的關係。如果多面體T與S同餘，且是由小多面體$P_1,P_2,\cdots,P_k$拼湊而成。假設$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是多面體$T$的所有二面角；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是多面體$S$的所有二面角。現在我們要來算所有小多面體$P_1,P_2,\cdots,P_k$上所有二面角的和。因為多面體$T$可由小多面體$P_1,P_2,\cdots,P_k$拼湊而成；所以任何小多面體$P_i$上的任一條邊線可能有如下的四種情形：

(1) 小多面體P_i上的邊線是多面體T的某邊線的一段（因為T的一條邊線可能是好多條小多面體上的邊線接起來）。

(2) 小多面體P_i上的邊線落在T的某個面上；而不在T的邊線上。

(3) 小多面體P_i上的邊線落在T的內部，且此邊線僅跟其它小多面體的邊線相接觸；沒有跟任何其它小多面體的面接觸。

(4) 小多面體P_i上的邊線落在T的內部，且此邊線恰與某小多面體的某個面接觸。

要算所有小多面體$P_1,P_2,\cdots,P_k$上所有二面角的和，只需算上述四類中小多面體P_i上的邊線所對應的二面角的和即可。第一類小多面體P_i上的邊線所對應的二面角的和可表為

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m,$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_m$是某些正整數；第二類小多面體P_i上的邊線所對應的二面角的和是π的倍數；第四類小多面體P_i上的邊線所對應的二面角的和也是π的倍數；至於第三類小多面體P_i上的邊線所對應的二面角的和則是2π的倍數。因此所有小多面體$P_1,P_2,\cdots,P_k$上所有二面角的和可表為

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m+L_T\pi,$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_m$是某些正整數；L_T為某非負整數。

因為小多面體$P_1,P_2,\cdots,P_k$也是多面體S的一種分割，所以同理可知道：所有小多面體

$P_1, P_2, \cdots, P_k$ 上所有二面角的和可表為

$$b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_n\beta_n + L_S\pi,$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是某些正整數；L_S 為某非負整數。綜合這兩個表示式，我們得到一個關於同餘多面體的必要條件如下：

定理 39.2 如果多面體 T 與 S 同餘，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是多面體 T 的所有二面角；$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是多面體 S 的所有二面角則存在正整數 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 使得

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m) - (b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_n\beta_n)$$

是 π 的整數倍。

有了上述定理之後，我們可以用此定理來證明希爾伯特的第三問題。

定理 39.2 證明：單位體積的正四面體與正六面體（正立方塊）是不同餘的。

【證明】假設正四面體的二面角為 α，則我們容易計算得到

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

至於正六面體（正立方塊）的二面角則均為 $\frac{\pi}{2}$。現在假設“單位體積的正四面體與正六面體（正立方塊）同餘”，則根據前定理，我們必須有

$$a \cdot \alpha - b \cdot \frac{\pi}{2} = c \cdot \pi,$$

其中 a, b 為正整數，c 為整數。由此我們推得

$$\alpha = \frac{m\pi}{n},$$

其中 m, n 為正整數。

令

$$z=\cos\alpha+i\sin\alpha=\frac{1+2\sqrt{2}i}{3};$$
$$\bar{z}=\cos\alpha-i\sin\alpha=\frac{1-2\sqrt{2}i}{3}.$$

因為$\alpha=\dfrac{m\pi}{n}$，所以有$z^n=\bar{z}^n=1$；即z與$\bar{z}$是方程式$x^n-1=0$的兩個相異根。

又因為

$$(x-z)(x-\bar{z})=x^2-\frac{2}{3}x+1.$$

因此我們得到

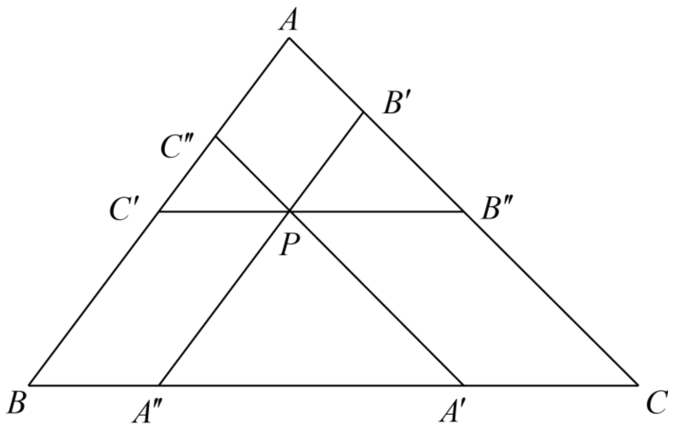
$$\left(x^2-\frac{2}{3}x+1\right)\Big|\left(x^n-1\right) \tag{39.1}$$

針對式子(39.1)，我們有兩種作法，第一種作法是直接證明多項式$x^2-\dfrac{2}{3}x+1$是不可能整除多項式x^n-1；另一種是使用第 26 節的高斯引理。所謂高斯引理是說一個首項係數為 1，其它項係數為有理數的多項式如果整除一個首項係數為 1，其它項係數為整數的多項式，則除式的其它項係數必須也是整數。所以式子(39.1)與高斯引理是相違背的。因此最開始的假設是錯的，即單位體積的正四面體與正六面體（正立方塊）是不同餘的。

動手玩數學

如下圖：P是三角形ABC內部的一點，過P點的三條線分別與三角形的底邊平行且線段長$AB=c, BC=a, CA=b; A'A''=a', B'B''=b', C'C''=c'$。試證明

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=1.$$



挑戰題

定義多項式

$$f_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{i}x^{2n-i}(1-x)^i.$$

若n為正整數，則證明

$$x^{n-1}(1-x)^{n-1}\big|\left(f_n(x)-f_{n-1}(x)\right).$$

質數分佈猜想

我們用符號$\pi(x)$代表不大於x的質數個數；例如

$$\pi(4)=2,\pi(7)=4,\pi(12)=5,\cdots.$$

關於π函數最有名的猜想是：對任何正數x與y是否

$$\pi(x+y)\le\pi(x)+\pi(y)$$

恆成立。這是一則很難的數論問題，有一些數學家認為這個猜想是錯誤的，正確的敘述應該是如下：

$$\pi(x+y)\le\pi(x)+2\pi(\frac{y}{2}).$$

直到今天，這兩則猜想是否成立仍然不知道。數學家蒙哥馬利，塞爾伯格及范昂曾經證明過如下的定理：

$$\pi(x+y) < \pi(x) + \frac{2y}{\log y}.$$

關於π函數，我們有如下的表示式（讀者可嘗試證明此公式）：若x為正整數$(x \geq 2)$則

$$\pi(x) = \sum_{k=2}^{x} \left[\frac{(k-1)!+1}{k} - \left[\frac{(k-1)!}{k} \right] \right],$$

這裡的符號[ ]代表高斯記號。與π函數相關所知道最有名的結果是貝特朗假設：對任意大於 1 的正整數n必存在一個質數介於n與$2n$之間，即

$$\pi(2n-1) - \pi(n) \geq 1.$$

這個假設是十九世紀的數學家貝特朗提出的；之後被數學家謝瓦萊證明是正確的。